

論述

有限元素分析應用於瓦楞紙板強度之預測

林曉洪¹ 徐尙宗² 洪國榮² 黃健能²

一、前言

紙張主要由木材纖維所組成，為一天然可再生資源，故亦為綠色材料。雖其力學性質不及木材，惟其優點為使用後可回收數次再利用，故除可節省寶貴的資源外，對公害影響亦為最輕微者。

依據台灣區造紙工業同業公會統計資料(台灣區造紙工業同業公會，2006)顯示，2005年台灣區紙張總生產量約466萬噸，其中紙板生產量約337萬8千噸，占總產量72.5%；紙板中，紙箱用紙生產量約249萬8千噸，占總產量53.6%，為紙板產量73.9%。由此可見紙箱用紙在造紙工業之重要性。

自早期至今，造紙及包裝之相關產業多利用破裂強度、環壓強度及耐壓強度試驗等測值作為評估瓦楞紙板及估計瓦楞紙箱的強度。其中紙箱耐壓強度計算公式，如 kellicutt、Maltenfort、Mackee 及 Wolf 等為業界所熟知者。近年來則有許多學者紛紛開始利用有限元素分析(Finite element analysis; FEA)探討瓦楞紙板的力學行為。有限元素分析是以模擬瓦楞紙板力學行為的有限元素模型為基礎，進行瓦楞紙板於各種載重條件下之強度預測。其優點如 1.減少研發成本，在產品研發的設計階段，可免去不必要的試驗；2.縮短研發時間，在設計初期即可獲得更充分的瓦楞紙板力學性質資料；3.如須使用新材質，可評估其通過整套測試項目的可行性；及 4.可作為瓦楞紙板

局部現象(局部應力及變形)之研究。(Aboura *et al.*, 2004)

欲建立能預測瓦楞紙板行為的有限元素模型並對其加以驗證，首先需完成原材料—裱面紙板與瓦楞芯紙及瓦楞紙板之試驗；包含拉伸、剪力、抗彎及側向抗壓強度試驗(Edge compression test; ECT)等。其目的在於獲得非均向材料—紙張之彈性係數及強度等四項參數，以建立層板內之平面應力模式。此四項參數為縱向或 MD 彈性係數(E_L 或 E_x)、橫向或 CD 彈性係數(E_T 或 E_y)、波松比(ν_{LT})及剪彈性係數(G_{LT} 或 G_{xy})等(Aboura *et al.*, 2004、Biancolini and Brutti, 2003)。其次為發展出完整的有限元素模型以建構局部的瓦楞紙板模型。經模型網格(Mesh)尺寸之最適化後，最後再進行模型的驗證工作，即將分析結果的數值與實驗值進行比對。

本文擬就瓦楞紙板之性質及應用有限元素分析預測瓦楞紙板強度進行整理，期提供相關研究之參考。

二、瓦楞紙板概論

周守正(1982)曾列舉瓦楞紙箱之八大優點，即(1)有效利用木材資源，相同木材耗用量，瓦楞紙箱之容積為其他木質容器之5-7倍(2)包裝材料費用低(3)重量輕、作業性良好(4)可大量生產(5)可獲得某種必要之強度(6)可施以精美印刷，提高商品價值(7)可摺疊堆

1. 國立屏東科技大學 木材科學與設計系教授

Professor. Department of Wood Science and Design, NPUST.

2. 國立中興大學 森林學系 研究生(通訊作者)、教授、研究生

Graduate student (Corresponding author), Professor and Graduate student. Department of Forestry, NCHU.

存，減少儲存空間及 (8) 可耐運輸及堆積，保護被包裝物等。瓦楞紙箱係由瓦楞紙板摺合而成，而瓦楞紙板係由膠合劑將波浪狀的瓦楞芯紙與其上、下側之裱面紙板黏合而成 (圖 1)；

係一廣泛應用於包裝工業的材料。其主要優點為材質輕 (相對於木材、木質、金屬)、具相當強度、便於搬運、可再回收利用及價格低廉等特性，故為製造包裝容器最佳材料選項之一。

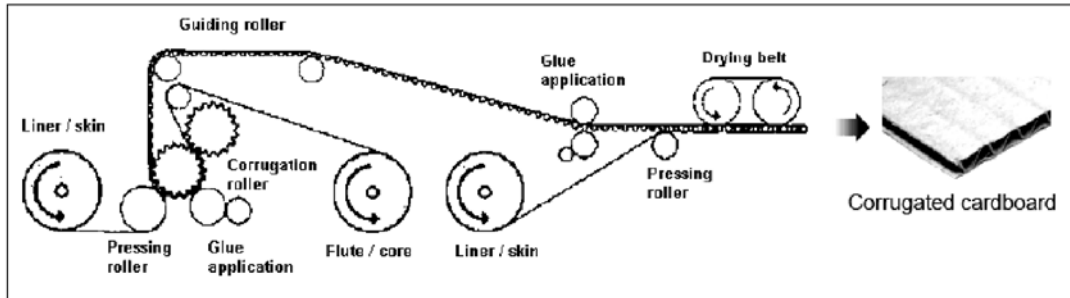


圖 1. 瓦楞紙板之生產示意圖 (Pflug *et al.*, 2004)

Fig. 1. The diagram of the corrugated board process.

於其他的應用領域亦可發現以瓦楞紙板作為結構設計用材之實例。如，El Damatty 等學者 (2000) 曾發表紙板避難所 (圖 2) 的結構設計及其計算方法；Ahmed 等學者 (Biancolini, 2005) 亦於同年曾研究探討比較鋼及紙板製成

之屋頂用波浪板相關性質。於家具材之應用，則有 Pflug 等學者 (2004) 探討 TorHex 蜂巢芯板 (由瓦楞紙板製成) (圖 3) 之力學性質；雖然 TorHex 蜂巢芯板的強度性質並不理想，但具有非常高之衝擊抗彎強度。

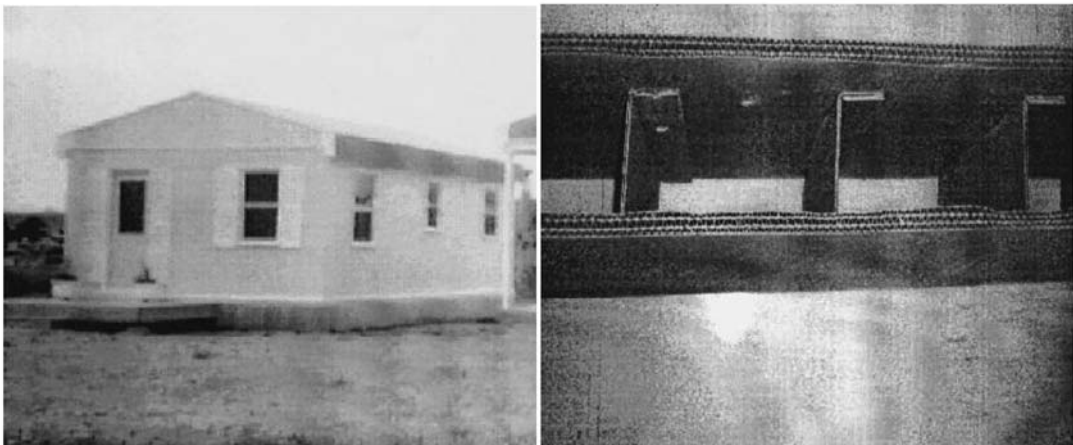


圖 2. 避難所 (左) 及其牆壁橫段面 (右) 照片 (El Damatty *et al.*, 2000)

Fig. 2. The Photos of a finished shelter (left) and the cross-section of side walls (right).

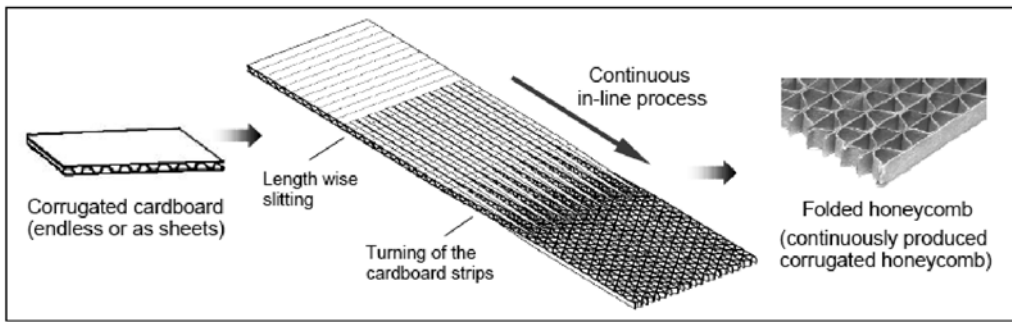


圖 3. TorHex 紙質蜂巢芯板之製作示意圖 (Pflug *et al.*, 2004)

Fig. 3. The diagram of TorHex paper honeycomb process.

瓦楞紙板於工業應用時，其強度為極重要之參考指標。圖 4 為瓦楞紙板的概略外形。顯示其為一具有方向性的複合結構材料，此因其組成一裱面紙板及瓦楞芯紙為異方性 (Anisotropy) 材料及芯層之瓦楞構造所造成。為了界定此材質的方向特性，此以圖 4 說明之，即 MD 為紙面上之紙機方向，此係紙張或瓦楞紙板的製造方向，並定義與 x 軸方向相同；CD 為紙面上之橫向，與紙機方向垂直，並定義與 y 軸方向相同；TD 為紙張或瓦楞紙板厚度方向，並定義與 z 軸方向相同。此外圖 4 中尚有幾個重要的物理量，分別為瓦楞紙板的厚度 (H)、波浪狀瓦楞的高度 (h_c)，瓦楞的投影長度 (p)。瓦楞紙板之載重能力一方面來自於其原材料的強度，即位於表層之裱面紙板賦予瓦楞紙板抵抗彎曲的性能，芯層的瓦楞芯紙則賦予瓦楞紙板抵抗剪力的性能；另一方面則取決於正確的結構設計 (Aboura *et al.*, 2004 ; Nyman and Gustafsson, 2000)。紙板組件的結構分析是紙箱設計的一個關鍵。在堆疊所造成的側面壓潰及垂直重壓下，紙箱必須能夠保護內裝物品不會受到損害；因此紙板強度特性的研究遂成爲重要的一項工作。事實上在上述載重情況下，尚可能會發生挫曲 (Buckling) 破壞而降低了瓦楞紙板或紙箱原有的載重能力；欲避免發生此種情形即需對紙板的結構特性一剛性性質－應有深度的了解。

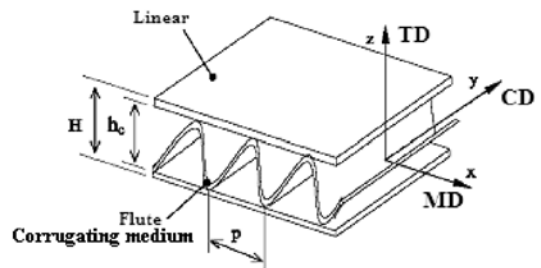


圖 4. 瓦楞紙板外形及主要的材料方向 (Modified from Aboura *et al.*, 2004)

Fig. 4. Corrugated board geometry and principal material directions.

三、瓦楞紙板的組成及種類

(一) 裱面紙板 (Liner board)

依 CNS 1455 之定義：以製造外裝紙箱用瓦楞紙板之外層爲目的之紙板，包括本色(未漂)牛皮紙板、斑白裱面紙板 (Mottled white liner)、全白裱面紙板 (Bleached white liner)、塗布裱面紙板 (Coated liner) 及其他種類之紙板。

依其品質之不同，區分爲特 A、A、B 及 C 等四級，基本特性要求，如表 1 所示。

(二) 瓦楞芯紙 (Corrugating medium)

依 CNS 2955 之定義：以製造外裝紙箱用瓦楞紙板之內層或中芯爲目的之紙板稱之。

依其品質之不同，區分爲特 A、A 及 B 等三級，基本特性要求，列如表 2 所示。

表 1. 裱面紙板之分類及其特性要求 (經濟部標準檢驗局, 2005)

Table 1. The grades of linerboards and the characteristics requirements.

種類	基重 ⁽¹⁾ g/m ²	破裂強度 kgf/cm ² {kPa}	比破裂度 {kPa·m ² /g}	環壓強度 (橫向) kgf {N}	比環壓強度 kgf m ² /g {N·m ² /g}	水分 %
特 A 級	180	5.9{579} 以上	3.3{324} 以上	23.4{229} 以上	13{127} 以上	8.0±1.0
	200	6.6{647} 以上		26.0{255} 以上		
	220	7.3{716} 以上		28.6{280} 以上		
	240	7.9{775} 以上		31.2{306} 以上		
	280	8.7{853} 以上	3.1{304} 以上	39.2{384} 以上	14{137} 以上	
	340	10.5{1030} 以上		47.6{467} 以上		
A 級	180	5.6{549} 以上	3.1{304} 以上	21.6{212} 以上	12{118} 以上	8.0±1.0
	200	6.2{608} 以上		24.0{235} 以上		
	220	6.8{667} 以上		26.4{259} 以上		
	240	7.4{726} 以上		28.8{282} 以上		
	280	8.1{794} 以上	2.9{284} 以上	36.4{357} 以上	13{127} 以上	
	340	9.9{971} 以上		44.3{434} 以上		
B 級	220	5.5{539} 以上	2.5{245} 以上	24.2{237} 以上	11{108} 以上	8.0±1.0
	240	6.0{588} 以上		26.4{259} 以上		
	280	7.0{686} 以上		33.6{330} 以上	12{118} 以上	
	340	8.5{834} 以上		40.6{400} 以上		
C 級	180	3.6{353} 以上	2.0{196} 以上	18.0{176} 以上	10{98} 以上	8.0±1.0
	200	4.0{392} 以上		20.0{196} 以上		
	220	4.4{431} 以上		22.0{216} 以上		
	240	4.8{471} 以上		24.0{235} 以上		

註 (1): 基重許可差 ±5%

表 2. 瓦楞芯紙之分類及其特性要求 (經濟部標準檢驗局, 2005)

Table 2. The grades of corrugating mediums and the characteristics requirements.

種類	基重 ⁽¹⁾ g/m ²	厚度 mm	斷裂長度 (縱向) km	環壓強度 (橫向) kgf{N}	比環壓強度 (橫向) kgf m ² /g {N·m ² /g}	水分 %	平面壓縮 強度 kgf{N}	比平面壓 縮強度 kgf m ² /g {N·m ² /g}
特 A 級	115	0.19-0.23	4.0 以上	12.7{125} 以上	11{108} 以上	9±1	16.7{164} 以上	14.5{142} 以上
	125	0.21-0.25		13.8{135} 以上			18.1{177} 以上	
	160	0.26-0.31		20.8{204} 以上	13{127} 以上		23.2{227} 以上	
A 級	180	0.29-0.34		23.4{229} 以上			26.1{256} 以上	
	115	0.19-0.23	3.5 以上	10.4{102} 以上	9{88} 以上	9±1	15.0{147} 以上	13.0{127} 以上
	125	0.21-0.25		11.3{111} 以上			16.3{160} 以上	
	160	0.26-0.31		17.6{173} 以上	11{108} 以上		20.8{204} 以上	
180	0.29-0.34		19.8{194} 以上		23.4{229} 以上			
B 級	115	0.19-0.23	3.0 以上	8.1{79} 以上	7{69} 以上	9±1	12.7{125} 以上	11.0{108} 以上
	125	0.21-0.25		8.8{86} 以上			13.8{135} 以上	
	160	0.26-0.31		14.4{141} 以上	9{88} 以上		17.6{173} 以上	
	180	0.29-0.34		16.2{159} 以上			19.8{194} 以上	

註 (1): 基重許可差 ±5%

(三) 瓦楞紙板 (Corrugated board)

依 CNS 1454 之定義：以製造運輸用紙箱為目的，由裱面紙板及瓦楞芯紙組合而成之平板狀瓦楞紙板。依其構造分為單層 (雙面，以 S 表示) 及雙層 (複雙面，以 D 表示) 兩種。依楞型形狀分 A、B、C 等三類。

瓦楞之楞型形狀除 CNS 所規定者，尚有其他型式，較常見者為 E 楞。各國對楞型高度及單位數量 (個/30 cm) 的規定稍有差異。

四、有限元素分析之應用

(一) 有限元素分析之預備試驗

就探討結構物一般性能的方式而言，通常係依據標準計畫行為理論 (Theory of planned behavior ; TPB) 及剪力試驗執行橫向剪力剛性、彎曲剛性的實驗及數值計算 (Biancolini and Brutti, 2003)。另者，當載重方向與 MD 垂直時，瓦楞紙板可視為短而寬的短柱結構，可採用側向抗壓強度試驗的結果預測瓦楞紙板及瓦楞紙箱的挫曲強度 (Urbanik, 1996)。有限元素法利用試驗數據及計算得到的參數，進行局部結構物的外形數值分析。

試樣在進行各項試驗前須經 23±2°C、

50±2% RH 環境下調濕 24 小時以上，每項測試之最低試樣數量為 10 件。試驗項目概述如下。

1. 裱面紙板與瓦楞芯紙的試驗

測試裱面紙板及瓦楞芯紙之目的在於求得基重、厚度、縱向與橫向彈性係數 (Young's modulus)、波松比 (Poisson's modulus)、降伏應力及極限應力等參數。縱向與橫向彈性係數及波松比可由試樣的縱向及橫向拉伸試驗結果求得。

剪彈性係數可依下式求得，式中 E_{45} 為試樣之測試方向與 MD 呈 45° 時所測得的試樣彈性係數。

$$G_{LT} \text{ 或 } G_{xy} = \left[\frac{2\nu_{LT}}{E_L} - \frac{1}{E_L} - \frac{1}{E_T} + \frac{1}{E_{45}} \right]^{-1}$$

表 3 為學者 Urbanik 探討瓦楞紙板紙機方向強度所使用之裱面紙板及瓦楞芯紙的參數；由數據顯示，基重較大者，其強度及彈性係數亦較大。Biancolini 及 Brutti 兩位學者的實驗數據，如表 4 所示。由紙機方向與橫向之數值差異、係數的誤差值達 18.8% 及強度的誤差值達 22.2%，可窺知紙張是一種非均向性，且變異很大的材料。

表 3. 裱面紙板(紙機方向)與瓦楞芯紙性質 (橫向) (Modified from Urbanik, 1996)

Table 3. Average MD properties of liner and average CD properties of corrugating medium.

Average MD properties of linerboard.

BW g/m ²	Measurement			Property		
	S_u kN/m	EA_u MN/m	EI_u mN·m	σ_c MPa	d_2 GPa	h μm
139	3.17	1.14	3.93	15.6	5.61	203
169	3.93	1.39	6.02	17.2	6.10	228
207	4.62	1.78	11.5	16.6	6.38	278
278	5.32	2.29	27.8	13.9	5.99	382
333	6.00	2.35	39.4	13.4	5.23	449
437	7.84	3.03	82.2	13.7	5.31	571

Average CD properties of corrugating board

BW g/m ²	Measurement		
	<i>t</i> μm	<i>E</i> A _u MN/m	<i>c</i> ₂ GPa
85	153	315	2.06
136	253	389	1.54
165	308	545	1.77
189	378	602	1.59
270	422	883	2.09

表 4. 依據義大利標準瓦楞紙板製造同業公會而設計之瓦楞紙板之試驗結果：係數及強度 (Modified from Biancolini and Brutti, 2003)

Table 4. Experimental results for corrugated board paper designated according to Italian standard GIFCO: Moduli and Strength.

Moduli											
Name	E _{MD} (MPa)	Error (%)	E _{CD} (MPa)	Error (%)	E ₄₅ (MPa)	Error (%)	G _{xy} (MPa)	Error (%)	<i>v</i>	<i>ρ</i> (g/m ²)	Thickness (mm)
KL-5	3326	7.35	1694	12.3	2160	9.41	860	18.8	0.34	200	0.29
S-9	2614	8.69	1532	11.1	1954	9.82	792	18.8	0.33	175	0.30

Strength										
Name	<i>σ</i> _{yCD} (MPa)	Error (%)	<i>σ</i> _{uCD} (MPa)	Error (%)	<i>σ</i> _{yMD} (MPa)	Error (%)	<i>σ</i> _{uMD} (MPa)	Error (%)	RTC KN/m	
KL-5	7.07	19.4	19.4	5.3	10.4	13.4	41.2	4.0	2.36	
S-9	6.36	22.2	14.9	6.2	10.9	16.3	32.6	8.5	1.92	

2. 瓦楞紙板的試驗項目

試驗項目包括拉伸試驗 (Tensile tests)、剪力試驗 (Shear tests)、抗彎強度試驗 (Bending tests) 及側向抗壓強度試驗 (Edge compression test ; ECT) 等。

試驗結果如表 5-8 所示 (Urbanik, 1996 ;

Aboura *et al.*, 2004)。依表 5 之拉伸應力數據，試樣的 MD/CD 比值為 1.61，可知瓦楞紙板亦為非均向材料。另需要注意的是，即便橫向彈性係數 (E_{CD}) 的變異達 15%，Aboura 等學者認為仍在可接受範圍內；由此亦可得知瓦楞紙板是一種性質變異大的材料。

表 5. 瓦楞紙板的拉伸性質 (Modified from Aboura *et al.*, 2004)

Table 5. Tensile properties of corrugated board.

E _{MD} (MPa)	<i>v</i> _{xy}	<i>σ</i> _{MD} (MPa)	E _{CD} (MPa)	<i>v</i> _{yx}	<i>σ</i> _{CD} (MPa)
863.05±99.50 (11.53%)	0.27±0.03 (11.11%)	4.44±0.14 (3.15%)	554.97±85.89 (15.47%)	0.22±0.03 (13.64%)	2.76±0.28 (10.14%)

表 6. 瓦楞紙板的剪力性質 (Modified from Aboura *et al.*, 2004)

Table 6. Shear properties of corrugated board.

G_{xz} (MPa)	G_{yz} (MPa)	G_{xy}^B (MPa)
2.32±0.12	3.93±0.14	267.83

表 7. 瓦楞紙板的抗彎性質 (Modified from Aboura *et al.*, 2004)

Table 7. Bending properties of corrugated board.

E_{MD} (MPa)	E_{CD} (MPa)	$E_{MD\ flex} / E_{MD\ tensile}$	$E_{CD\ flex} / E_{CD\ tensile}$
844.45±71.29(8.44%)	605.73±24.54(4.05%)	0.98	1.09

表 8. 瓦楞紙板紙機方向側向抗壓強度 (Urbanik, 1996)

Table 8. MD ECT strength of corrugated board.

Corrugated Medium BW, g/m ²	Actual and Predicted (in parentheses) Strength, kN/m, at Various Linerboard BW					
	139 g/m ²	169 g/m ²	207 g/m ²	278 g/m ²	333 g/m ²	437 g/m ²
85	1.68	2.45	4.27	6.97	8.58	11.8
136	2.56	3.43	5.52	7.81	10.4	12.8
165	2.68	3.61	5.29	8.62	9.61	14.4
189	2.94	3.78	5.29	9.25	10.6	13.7
270	3.05	4.12	5.50	8.86	10.8	14.9

(二) 有限元素法

1. 簡介

雖然有限元素法的名稱於 50 年前才被提出，不過遠在很久以前就已具有此種概念。例如，古代的數學家發現可用一多邊形近似地表示一個圓的圓周；若以目前的表示法，則多邊形的每一個邊，均稱為“有限元素”。有限元素分析係 Turner、Clough、Matin 及 Topp 等航空工程師為分析飛機複雜的結構問題，而於 1956 年提出第一篇有限元素法的論文。其後陸續有許多相關書籍及論文發表，應用範圍也由航太工業擴及造船、土木、機械、汽車...等工業。1990 年代，隨著個人電腦效能之突飛猛進及以有線元素法開發之有限元素分析軟體的蓬勃發展，有限元素分析已成為電腦輔助設計 (Computer Aids Design ; CAD) 不可或缺的部分 (李鈇鋒，1997；康淵、陳信吉，2006；Rao，陳昭昌編譯，1989)。

本文中所介紹之瓦楞紙板的等效剛性性質

(Equivalent stiffness properties) 是以有限元素模型 (Finite elements model) 建立瓦楞紙板之局部不連續模型後，再以正交殼元素重建紙張的實際性能。

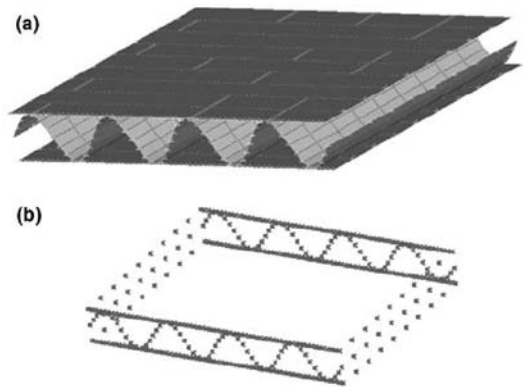


圖 5. 有限元素模型的微觀幾何外形 (a) 和邊界節點 (b) (Biancolini, 2005)

Fig. 5. FE model of microgeometry (a) and boundary nodes (b).

瓦楞紙板的等效彈性性質 (Equivalent elastic properties) 是藉由均質程序 (Homogenization procedure) 而求得；其為一種可以擷取“瓦楞紙板”等效元素，並與詳細模型具備相同性能的一種方法。均質程序是一種不受限制的方法，可自有限元素所建構的模型中隨意擷取出等效薄板。完成微觀力學模型的均質程序可以達成模型簡化的目標；簡化後的模型只需分析邊界節點 (Node) 的自由度，再經由能量平衡的方法在等效剛性矩陣與有限元素模型簡化矩陣之間建立等式，便能求出近似解。圖 5 為瓦楞紙板的有限元素模型。

均質化過程的第一步驟為靜態簡化 (Static condensation)，是將內部各點移除僅留下外部節點。進而利用簡化剛性矩陣，由邊界節點之位移量計算出邊界節點的載重。圖 5 (b) 所示為外部節點，為有限元素模型邊界上之全數節點，構成等效薄板的邊緣。

假設內部點的載重為 0，可以簡化剛性矩陣藉由邊界節點之位移量計算出邊界節點的載重，其推導過程如下 (Biancolini, 2005)：

由虎克定律

$$[\bar{K}] \cdot \{u_e\} = \{F_e\}$$

將 $[\bar{K}]$ 矩陣改寫為

$$[\bar{K}] = [K_{cc}] - [K_{ci}] \cdot [K_{ii}]^{-1} \cdot [K_{ic}]$$

將整個剛性矩陣分割成四個次矩陣：

$$\begin{bmatrix} K_{cc} & K_{ci} \\ K_{ic} & K_{ii} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_e \\ u_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_e \\ 0 \end{Bmatrix}$$

假設位移向量為 $\{u_e\}$ ，則儲存於物體內的總彈性能為

$$E = \frac{1}{2} \cdot \{u_e\}^T \cdot \{F_e\}$$

為了在有限元素模型與等效平板之間建立能量等式，必須定義一個位移場。在邊界上每個節點的位移可以直接藉由一個轉換矩陣 (5N 列，6 行) 而與薄板的應變向量建立關聯。依據克希荷夫假設，應變場可視為

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

進行平面內位移場的積分計算

$$u(x, y, z) = \frac{y}{2} \gamma_{xy}^0 + \frac{yz}{2} k_{xy} + \varepsilon_x^0 x + xzk_x$$

$$v(x, y, z) = \frac{x}{2} \gamma_{xy}^0 + \frac{xz}{2} k_{xy} + \varepsilon_y^0 y + yzk_y$$

由曲率定義

$$\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}$$

在第一次積分之後，得到角旋轉場

$$\phi_y(x, y) = -\frac{\partial w}{\partial x} = xk_x + \frac{y}{2} k_{xy}$$

$$\phi_x(x, y) = \frac{\partial w}{\partial y} = -yk_y - \frac{x}{2} k_{xy}$$

經進一步積分，得到垂直位移場

$$w(x, y) = -\frac{x^2}{2} k_x - \frac{xy}{2} k_{xy} - \frac{y^2}{2} k_y$$

就節點在邊界上的位置及其固定的應變向量而論，每個節點的位移量為

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ u_x \\ u_y \\ u_z \\ \phi_x \\ \phi_y \\ \vdots \end{pmatrix}_j = \begin{bmatrix} \vdots \\ [A_e]_j \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix}$$

經簡化可得

$$\{u\}^T = [A_e] \cdot \{k\}$$

上式中與向量 (x^j, y^j, z^j) 內某單一節點 j 的次矩陣為

$$[A_e]_j = \begin{bmatrix} x^j & 0 & \frac{y^j}{2} & x^j z^j & 0 & \frac{y^j z^j}{2} \\ 0 & y^j & \frac{x^j}{2} & 0 & y^j z^j & \frac{x^j z^j}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{x^j x^j}{2} & -\frac{y^j y^j}{2} & -\frac{x^j y^j}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y^j & -\frac{x^j}{2} \\ 0 & 0 & 0 & x^j & 0 & \frac{y^j}{2} \end{bmatrix}$$

不連續模型之應變能的定義為

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \cdot \{u_e\}^T \cdot [\bar{K}] \cdot \{u_e\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \{k\}^T \cdot [A_e]^T \cdot [\bar{K}] \cdot [A_e] \cdot \{k\} \end{aligned}$$

就薄殼受到彎曲作用而論，其產生的內部應變能為

$$E = \frac{1}{2} \cdot \{k\}^T \cdot [ABD] \cdot \{k\} \cdot \{area\}$$

則可以擷取薄板的整體剛性矩陣成為不連續的剛性矩陣 ABD

$$[ABD] = \frac{[A_c]^T \cdot [\bar{K}] \cdot [A_c]}{\{area\}}$$

在技術文獻中，等效元素近似古典層疊板理論 (Classical Laminated Plate Theory; CLPT)，即假定瓦楞芯紙是一種等效正交的薄板 (Equivalent orthotropic lamina)。不過，此種方法忽略了瓦楞紙板之等效薄板在彎曲與伸展上的材質差異，及瓦楞芯紙與裱面紙板的結合並非是全面性的膠合在一起。

在有限元素分析的商業軟體中，Biancolini 選用 MSC/Nastran 軟體為之；它可執行薄殼及複合材料等特性的分析 (李鈞鋒, 1997)。首先，等效複合矩陣 (Equivalent composite matrix) 對材料厚度作積分計算 (此過程為前處理)，接著將數據輸入可處理不同材質的”殼元素 (Shell element) 選項”以求得其彎曲 (Flexure)、伸展 (Extension)、彎曲-伸展聯合及橫向剪力 (Transverse shear) 等特性。在採用的方法中，

$$ABD_n = \begin{pmatrix} 1.024 \times 10^6 & 1.747 \times 10^5 & 0 & 1792.71 & 305.704 & 0 \\ 1.747 \times 10^5 & 5.206 \times 10^5 & 0 & 305.704 & 909.796 & 0 \\ 0 & 0 & 2.496 \times 10^5 & 0 & 0 & 436.402 \\ 1792.71 & 305.704 & 0 & 3.145 & 0.536 & 0 \\ 305.704 & 909.796 & 0 & 0.536 & 1.597 & 0 \\ 0 & 0 & 436.402 & 0 & 0 & 0.766 \end{pmatrix}$$

表 9 右側為理論與數值分析結果的比較，最大變異約為 0.4%。

第二項測試是組合之夾芯結構，它是由齒型瓦楞芯紙夾在兩層裱面紙板之間所組成。依據 Buannic 等人 (2003) 所提出的參考方法進行 T2 平板的研究；經由測試得到其最大偏差值小於 2.5%，見表 9 左側。

(三) 有限元素分析與試驗結果的比較

目前利用有限元素分析的途徑，可概分為

均質階段取代了前處理階段，並將得到之最終矩陣直接輸入”殼”的特性項目中。

Nastran 軟體先計算求得封閉形式解 (Closed form solution) 以驗證有限元素模型的可行性，接著再利用此模型完成不同紙板的參數分析。為了正確地重現整體剛性，因此需要每一層材料的係數 (包括紙張縱向楊氏係數 (E_L)，紙張橫向楊氏係數 (E_T)，紙張波松比 (ν_{LT})，紙張剪力楊氏係數 (G) 和每一層的厚度 (t)、瓦楞的高度 (h_c) 與瓦楞的投影長度 (p)、及實際的瓦楞外形 (曲線長度 l_c) 等參數。起楞率 (ψ) 是一種常用於瓦楞結構的幾何參數，為瓦楞實際長度與投影長度的比值 (l_c / p)。

2. 均質化的驗證

驗證的方法是將預測結果直接與理論值或實驗測值作比對，以檢驗數值方法的收斂性。Biancolini (2005) 是以兩個簡單的實例進行驗證：首先以簡化平面的平移 (Offset) 建立單一正交薄板的模型；第二個是參考 Buannic 等人 (2003) 的夾芯構造研究。

就單一薄板而論，擷取正方形裱面紙板 KL5 (材料的詳細資料參見表 13) 的 ABD 矩陣如下，數值小於 10^{-10} 者以 0 表示。

兩類；一者使用者自行撰寫分析程式；其優點為可自行掌控關鍵技術，減少元素誤用而發生錯誤分析的機會，並且不用購買昂貴的商業套裝軟體；但須有高深的學識為基礎。學者 Urbanik 即應用有限元素法預測瓦楞紙板的側向抗壓強度。另一者則是使用商業套裝軟體，如 ANSYS、NASTRAN、...等。

一般以商業套裝軟體進行有限元素分析的流程，可概分為三個階段 (吳佳璋、黃俊銘，

表 9. 驗證結果 (Biancolini, 2005)

Table 9. Validation results.

		Corrugated structure			Isolated lamina		
		Buannic	Model	Diff. %	CLPT	Model	Diff. %
A ₁₁	Pa m	1.11E+09	1.11E+09	0.54	1.02E+06	1.02E+06	0.10
A ₂₂	Pa m	1.36E+09	1.38E+09	1.47	5.21E+05	5.21E+05	-0.12
A ₁₂	Pa m	3.32E+08	3.41E+08	2.47	1.75E+05	1.75E+05	-0.23
A ₃₃	Pa m	4.12E+08	4.11E+08	-0.27	2.49E+05	2.50E+05	0.08
D ₁₁	Pa m ³	9.20E+05	9.20E+05	0.08	3.141	3.145	0.13
D ₂₂	Pa m ³	9.82E+05	9.93E+05	1.08	1.6	1.597	-0.19
D ₁₂	Pa m ³	2.76E+05	2.77E+05	0.47	0.538	0.536	-0.37
D ₃₃	Pa m ³	3.22E+05	3.27E+05	1.58	0.766	0.766	0.00
B ₁₁	Pa m ²				1790.924	1792.71	0.10
B ₂₂	Pa m ²				912.154	909.796	-0.26
B ₁₂	Pa m ²				306.484	305.704	-0.25
B ₃₃	Pa m ²				436.516	436.402	-0.03

2006；康淵、陳信吉，2006)：第一為前處理，此階段之工作項目為選用適當的元素、定義元素特性及材料性質、建立分析標之實體模型及產生有限元素模型等。第二階段為分析或求解，此階段之工作項目為確定分析方式及其解法選項、設定拘束邊界條件、設定外力或能量源的邊界條件、設定輸入輸出控制及求解。最後為後處理，係將分析所得的數據除保有原來之文字形式外，並轉為易於解讀的圖形模式，以作為判斷分析之用。

實際操作上，Aboura等學者採用配備AMD Duron 850 MHz處理器的電腦及Reflex-v有限元素程式，使用基本的三節點三角形板殼元素建構瓦楞紙板三點抗彎強度的試樣模型。瓦楞

紙板的外形參數如表 10 所示。三節點三角形板殼元素以克希荷夫假說(Kirchhoff hypotheses)為依據，結合等應變三角形(Constant strain triangle；CST)平面應力及不連續克希荷夫(Discrete Kirchhoff Theory；DKT)彎曲平板元素。利用高斯積分法(Gauss quadrature rule)將面積座標整合出剛性矩陣。為了求得各個元素位於局部座標的元素剛性矩陣，乃將元素上每一個節點的大區域座標轉換為局部座標以簡化計算；然後將計算得到之局部座標的剛性矩陣轉換回大區域座標。就計算簡化、位移與應力計算效率及結果可靠度等整體評估而言，DKT板殼元素應屬最佳選項。

表 10. 瓦楞紙板的外形參數，A 楞 (Modified from Aboura *et al.*, 2004)

Table 10. Geometric parameters of corrugated board, A-flute.

厚度 Thickness (mm)	楞形投影長度 Flute step (mm)	裱面紙板厚度 Liner thickness (mm)	1 公尺之瓦楞數量 Nbre of flute by meter
4.01	8	0.16	125 (A 楞)

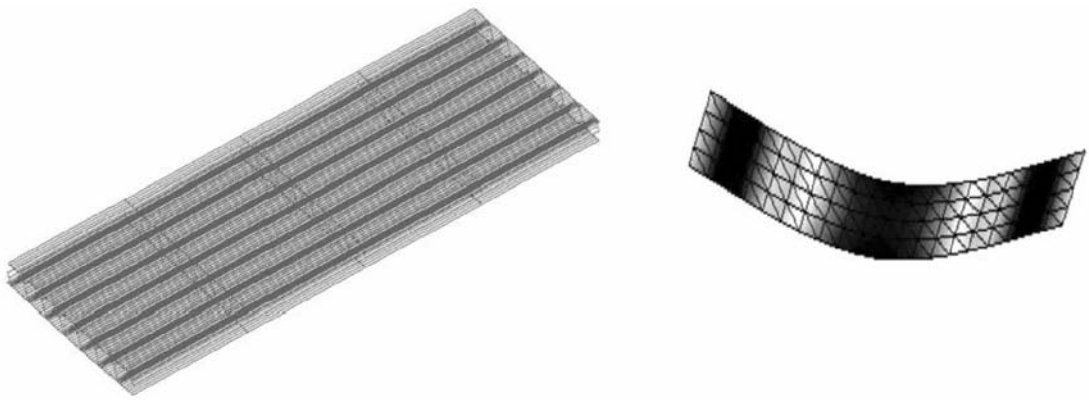


圖 6. 三維 (左) 及二維 (右) 之瓦楞紙板有限元素模型 (Modified from Aboura *et al.*, 2004)

Fig. 6. 3D (left) and 2D (right) finite element model of corrugated board.

Aboura 等學者尚進行詳細模型——利用 3D 殼建構法 (3D shell approach)，與簡化模型——利用 2D 板建構法 (2D plate approach) 的比較。前者是以薄殼元素選項中的 DKT 平板元素及 CST 膜片元素建構瓦楞紙板的裱面紙板與瓦楞芯紙；裱面紙板與瓦楞芯紙的膠合則假設為良好的結合，即模型中瓦楞芯紙與裱面紙板之相接位置為共用相同的節點。利用 3D 殼建構法建立模型須使用較多的元素數量及自由度；例如橫向的試樣模型是由 900 個元素，1070 個點構成。2D 板建構法則是將瓦楞紙板視為均質的合板，分別以 40、160、及 360 個 DKT 平板元素建構模型，藉以探討網格大小對 FEA 結果的影響。圖 6 為 3D 殼建構法與 2D 板建構法之有限元素模型。

Biancolini 及 Brutti 兩位學者則是使用 MSC 公司 Nastran 70.5 版及 FEMAP 7.0 前處理器進行瓦楞紙板及紙箱的強度分析。其依據方向性材料法則，使用二維 (2D) 4 節點之殼元素，依照 KLSKL 595C 瓦楞紙板實際橫斷面的圖像，模擬裱面紙板及瓦楞芯紙以進行完整詳細的等效元素模型分析。然後再依此元素模型產生尺寸為 100 mm × 25 mm 之等效瓦楞紙板模型 (圖 7)，進行側向抗壓強度試驗之模擬。該模型是由 4225 個 CQUAD4 殼元素，4251 個

點組成。

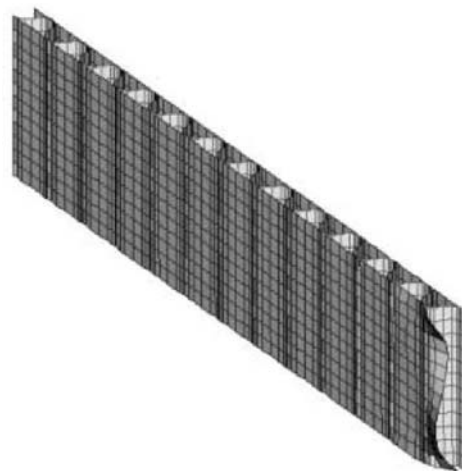


圖 7. 模擬 ECT 試驗之有限元素模型 (Biancolini and Brutti, 2003)

Fig. 7. Finite element model for ECT simulation.

為了計算模型的等效剛性矩陣，Biancolini 及 Brutti 將模擬側向抗壓強度之結果，以 1126 個 CQUAD4 殼元素，1167 個點構成 32 mm × 25 mm 之 KLSKL 595C 瓦楞紙板模型，進行平面剪應力、拉伸應力及平面外彎曲與扭轉的分析。

KLSKL 595C 瓦楞紙板為單層瓦楞紙板，
材質為 KL5 裱面紙板及 S9 瓦楞芯紙，瓦楞芯

紙製成 C 楞規格。KLSKL 595C 瓦楞紙板的外
形參數如表 11 所示。

表 11. 瓦楞紙板的外形參數，C 楞 (Modified from Biancolini, 2005)

Table 11. Geometric parameters of corrugated board, C-flute.

厚度 Thickness (mm)	楞形投影長度 Flute step (mm)	裱面紙板厚度 Liner thickness (mm)	1 公尺之瓦楞數量 Nbre of flute by meter
3.8	8	0.29	125 (C 楞)

表 12 為 Aboura 等學者的試驗結果與分析
值的比較。除拉伸彈性係數 (E_{MD}) 及紙機方向
波松比 (ν_{xy})，其他項目的分析值與試驗結果的
誤差值均在 5% 以下。造成拉伸彈性係數 (E_{MD})
及紙機方向波松比 (ν_{xy}) 誤差較大的原因，乃係
模型的外形為一靈敏之參數；稍有差異便對分
析結果造成很大的影響。影響模型外形參數的
因子包括瓦楞的投影長度、裱面紙板的厚度及
瓦楞紙板的厚度等。以裱面紙板的厚度為例，

當量測誤差為 10%，亦即僅相當於 0.016 mm
時，亦對彈性係數及剪彈性係數造成相同程度
的影響。

Biancolini 及 Brutti 取尚未加工的 KLSKL
595C 瓦楞紙板進行側向抗壓強度試驗，其有
限元素分析值與試驗值分別為 7.85 kN/m 及
7.74 kN/m (試驗值誤差 5.17%)，相對誤差為
1.42%；分析結果相當接近試驗數據。

表 12. 試驗結果與分析值之比較 (Modified from Aboura *et al.*, 2004)

Table 12. Comparison between analytical and experimental results.

	Analytical results	Experimental results	(Anal. -Exp.)/Exp. (%)
Tensile E_{MD} (MPa)	954.34	863.05	10.57
Tensile E_{CD} (MPa)	552.02	554.97	-0.53
Tensile ν_{xy}	0.314	0.271	15.87
Shear G_{xy} (MPa)	274.58	267.834*	2.51
Bending rigidity MD- D_{11} (MPa)	4347.60	4537.60	-4.19
Bending rigidity MD- D_{22} (MPa)	3104.00	3254.84	-4.63

* 由 Baum's 關係式 $G_{xy}^B = 0.387\sqrt{E_x E_y}$ 計算而得

表 13. 瓦楞紙板用紙之參數 (Biancolini, 2005)

Table 13. Corrugated board paper parameters.

Name	E_L (MPa)	E_T (MPa)	G_{LT} (MPa)	ν_{LT}	ρ (g/m ²)	t (mm)
S-6	3226	1610	825	0.34	150	0.25
S-9	2614	1532	724	0.32	175	0.30
KL-3	3940	1656	925	0.37	150	0.20
KL-5	3326	1694	859	0.34	200	0.29
KL-6	3292	1853	894	0.32	230	0.32
T-5	2500	1256	641	0.34	185	0.29

Biancolini 進一步研究不同材質組合、瓦楞外形 (起楞率) 及厚度對瓦楞紙板剛性的影響。實驗以 KLSKL595C 瓦楞紙板為基準材料；依據義大利瓦楞紙板製造同業公會 (Gruppo Italiano Fabbricanti Cartone Ondulato, GIFCO) 規範, KLSKL595C 係單層瓦楞紙板, 材質為 KL5 裱面紙板及 S9 瓦楞芯紙, 瓦楞芯紙製成 C 楞規格。試驗用紙板之力學性質, 如表 13 所

示。

Biancolini 選用厚度 3.8 mm 瓦楞紙板作為對照組材料, 楞形投影長度 8 mm。瓦楞紙板斷面實際起楞率為 1.435, 並記錄瓦楞的波形。

圖 8 為瓦楞的原物外形 (a)、正弦曲線外形 (b) 及鋸齒外形 (c) 等有限元素模型; 瓦楞的高度及楞形的投影長度均相同。

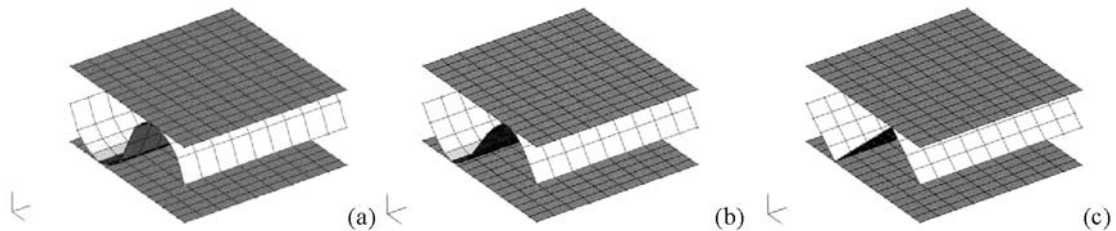


圖 8. 瓦楞紙板之有限元素模型 (a) 實物剖面; (b) 正弦函數剖面; (c) 鋸齒剖面 (Biancolini, 2005)
Fig. 8. FE model of corrugated board. (a) actual profile; (b) sine profile; (c) sawtooth profile.

此外, 以不同厚度之瓦楞紙板為材料, 如 3.5 mm 及 4.1 mm, 但均保持固定的楞形投影長度及外形尺寸。並進行瓦楞芯紙及裱面紙板之材料差異分析, 即瓦楞紙板是用最差的瓦楞芯紙 (KLSKL565C), 或最差的裱面紙板 (TST595C), 或前述兩者之組合 (TST565C) 及

使用較佳的裱面紙板 (KLSKL696C) 等製成。結果如表 14 所示。以 KLSKL595 對照組為基準, TST565 之彎曲剛性下降最多, 平均值為 -27.77%; 而厚度 4.1 mm 之 KLSKL595 性能最佳, 增加 18.04%; 彎曲剛性之絕對值分別為 3.731 Pa m³ 及 6.096 Pa m³。

表 14. 參數之分析結果 (Biancolini, 2005)

Table 14. Parametric analysis results.

Parameter	Unit									
Thickness	mm	3.8	3.8	3.8	3.8	3.8	3.8	3.8	3.5	4.1
Shape		Base	Saw tooth	Sine	Base	Base	Base	Base	Base	Base
Composition		KLSKL595	KLSKL596	KLSKL597	KLSKL565	TST565	TST595	KLSKL696	KLSKL595	KLSKL595
A ₁₁	Pa m	2,124,000	2,158,000	2,130,000	2,119,000	1,608,000	1,613,000	2,314,000	2,131,000	2,118,000
A ₂₂	Pa m	1,696,000	1,660,000	1,676,000	1,607,000	1,344,000	1,433,000	1,920,000	1,671,000	1,722,000
A ₁₂	Pa m	368,300	379,900	371,700	365,300	280,800	283,600	426,100	369,600	367,300
A ₃₃	Pa m	671,400	677,600	674,000	650,100	523,100	544,300	743,600	677,300	665,900
D ₁₁	Pa m ³	6.438	6.37	6.408	6.069	4.593	4.874	7.266	5.393	7.577
D ₂₂	Pa m ³	4.143	3.824	4.025	3.793	3.03	3.335	4.985	3.449	4.905
D ₁₂	Pa m ³	1.103	1.092	1.099	1.037	0.793	0.845	1.324	0.924	1.298
D ₃₃	Pa m ³	1.779	1.655	1.73	1.648	1.28	1.388	2.074	1.49	2.093
$\sqrt{D_{11} \cdot D_{22}}$	Pa m ³	5.165	4.935	5.079	4.798	3.731	4.032	6.018	4.313	6.096
$\Delta \sqrt{D_{11} \cdot D_{22}}$	%	0.00	-4.44	-1.66	-7.10	-27.77	-21.93	16.53	-16.49	18.04

表 14 中倒數第二橫列為縱向與橫向彎曲剛性的幾何平均值。此參數與單一支承平板的挫曲載重成比例；此結果與 1963 年 McKee 等人之研究結果相同，可作為紙箱壓縮強度的指標。同表中最後橫列則列出各試驗組材料之縱橫向彎曲剛性幾何平均值與對照組者 (厚度 3.8 mm 之 KLSKL595) 之相對變異參數。

表 14 可得剛性參數有些微差異之結果。此差異主要是因使用不同的裱面紙板。雖然原形的瓦楞似乎有最佳的彎曲剛性，惟其他瓦楞外形之彎曲剛性的下降 (鋸齒外形為 4.44%，正弦函數外形為 1.66%) 亦與其起楞率的相對下降有關。表示外形性能的下降，一部份可反應在降低成本。但此並未考慮裱面紙板與瓦楞芯紙之貼合強度的影響。

改變瓦楞芯紙的種類會加大彎曲剛性的差異。例如將 S9 改成較差的 S6 時會造成強度下降約 7% (KLSKL595 與 KLSKL565 間減少 7.10%，TST595 與 TST565 間減少 7.47%)。

在使用相同瓦楞芯紙的條件下，瓦楞紙板剛性會隨裱面紙板種類而有很大的差異，下降最多者是 KLSKL595/TST595 (-21.93%)；增加者則是 KLSKL595/KLSKL696 (+16.53%)。

另裱面紙板之影響程度也會受到瓦楞紙板平均厚度的影響。瓦楞紙板厚度由 3.8 mm 增

加 0.3 mm (3.8 mm/4.1 mm, +18.04%) 時，與裱面紙板由 KL5 改成 KL6 的效果 (KL5/KL6, +16.53%) 大約相同。相較於厚度由 3.8 mm 下降到 3.5 mm (3.8 mm/3.5 mm, -16.49%) 與裱面紙板由 KL5 改成 T5 (KL5/T5, -21.93%) 者，亦有相同的趨勢。

(四) 元素類型及其尺寸對 FEA 的影響

表 15 探討 2D 模型之分割數量與有限元素分析結果。理論上，在相同的模型尺寸條件下，建構模型的元素數量愈多，分析值 (解析解) 會愈接近實驗值 (正解)；但元素數量愈多亦意味著計算將愈複雜繁瑣，需耗費愈多的計算時間。表 15 之模型以不同分割數量進行紙機方向及橫向的變形分析，結果無明顯差異；因此，以 160 個 2D 板元素建構抗彎強度試驗之試樣模型，已可獲得很好之分析結果。表 16 將使用 2D 板元素及 3D 殼元素之分析結果與實驗值進行比較。就橫向的結果而論，3D 殼元素的誤差值為 7.9%，2D 板元素的誤差值為 11.9%。3D 殼元素構成的模型雖有較佳的計算結果，但其計算時間則約 2D 板元素 10 倍。因此，在設計初期，可運用簡單的 2D 板元素建構模型以快速求得近似解答；視需求再採用 3D 殼元素以求得更準確的數值。

表 15. 模型分割數量與有限元素分析結果 (Aboura *et al.*, 2004)

Table 15. Various mesh number of model and FEA results.

N×M	2×10	4×20	6×30
D.o.f.	99	315	651
MD deflection (mm)	1.3479	1.3563	1.3562
CD deflection (mm)	2.4650	2.4788	2.4787

表 16. 有限元素與試驗結果之比較 (Aboura *et al.*, 2004)

Table 16. Comparison between FE and experimental results.

	Plate FE		Shell FE CD	Exp. CD	Exp. MD
	MD	CD			
Bending rigidity (N/mm)	3.68	2.017	2.47	2.29±0.09	3.39±0.36
CPU time (s)	0.3	0.3	3	—	—

五、結語

- (一) 欲利用有限元素分析預測瓦楞紙板的力學行為，應進行基礎試驗以擷取厚度、縱向彈性係數 (E_L 或 E_x)、橫向彈性係數 (E_T 或 E_y)、波松比 (ν_{LT}) 及剪彈性係數 (G_{LT} 或 G_{xy}) 等參數。
- (二) 利用有限元素分析的途徑，可概分為兩類，即使用者自行撰寫分析程式及使用商業套裝軟體。
- (三) 以商業套裝軟體進行有限元素分析的流程，可概分為三個階段 (前處理、分析或求解及後處理)。
- (四) 影響有限元素分析的因子包括元素的種類和尺寸及實物之外形參數等。
- (五) 瓦楞紙板之外形參數包括瓦楞的投影長度、裱面紙板的厚度及瓦楞紙板的厚度等。
- (六) 紙箱的性能與瓦楞紙板的剛性有關。
- (七) 瓦楞之外形及瓦楞之材質對瓦楞紙板剛性參數的影響較小，主要是由裱面紙板材質的強度及瓦楞紙板的厚度所構成。
- (八) 在設計初期，可運用簡單的 2D 板元素建構模型以快速求得近似的解答；視需求再採用殼元素以求得更準確的數值。

六、參考文獻

- 台灣區造紙工業同業公會 (2006) 台灣造紙工業統計。台灣區造紙工業同業公會，台北市。第 16 頁。
- 李銓鋒 (1997) 電腦輔助工程應用—有限元素分析—。高立圖書有限公司。第 1-3 頁。
- 周守正 (1982) 工業包裝技術資料第 2 輯—瓦楞紙箱。中華民國對外貿易發展協會，台北市。第 2 頁、第 31-33 頁。
- 吳佳璋、黃俊銘 (2006) MSC.FEA (MSC. Patran + MSC. Nastran) 有限元素結構分析：基礎與實例演練。全華科技圖書有限公司。

1-2 至 1-9 頁。

- 陳昭昌 編譯 (1989) 有限元素法—工程上之應用。復文書局。第 2-3 頁。
- 康淵、陳信吉 (2006) ANSYS 入門，修訂三版。全華科技圖書有限公司。1-7 至 1-15 頁。
- 經濟部標準檢驗局 (2005) 中華民國國家標準 CNS1454 瓦楞紙板 (外裝紙箱用)。經濟部標準檢驗局，台北市。
- 經濟部標準檢驗局 (2005) 中華民國國家標準 CNS1455 裱面紙板。經濟部標準檢驗局，台北市。
- 經濟部標準檢驗局 (2005) 中華民國國家標準 CNS2955 瓦楞芯紙。經濟部標準檢驗局，台北市。
- Aboura, Z., N. Talbi, S. Allaoui, and M.L. Benzeggagh (2004) Elastic behavior of corrugated cardboard: experiments and modeling. *Compos. Struct.* 63 : 53-62.
- Biancolini, M. E. and C. Brutti (2003) Numerical and experimental investigation of the strength of corrugated board packages. *Packag. Technol. Sci.* 16 : 47-60.
- Biancolini, M. E. (2005) Evaluation of equivalent stiffness properties of corrugated board. *Compos. Struct.* 69 : 322-328.
- El Damatty AA, Mikhail A, Awad AA. (2000) Finite element modeling and analysis of a cardboard shelter. *Thin-Walled Struct.* 38 : 146, 148.
- Nyman, U. and P. J. Gustafsson (2000) Material and structural failure criterion of corrugated board facings. *Compos. Struct.* 50 : 79-83.
- Urbanik., T. J. (1996) Machine direction strength theory of corrugated fiberboard. *J. Compos. Technol. & Res.* 18(2) : 80-88.

